

Examen Programmation Linéaire Avancée
Février 2015

Durée 2 Heures 30

Tous documents papier autorisés
Ordinateur, tablette, calculatrice et téléphone non autorisés

Recommandations : Vous pouvez utiliser le résultat de questions précédentes pour répondre à une question. Vous prendrez soin de bien détailler chacune de vos réponses.

Exercice 1

Étant donné le programme linéaire (P) suivant :

$$(P) \begin{cases} \max z = & 2x_1 & +3x_2 \\ \text{s.c} & -x_1 & + x_2 & -\frac{1}{2} x_3 & \leq & -2 \\ & x_1 & + x_2 & + x_3 & = & 5 \\ & x_1 & , x_2 & , x_3 & \geq & 0 \end{cases}$$

Résoudre (P) par l'algorithme du simplexe.

NB :

- Détailler les différentes itérations de l'algorithme,
- À la fin du déroulement, préciser la valeur de (P) et les valeurs optimales de toutes les variables de la forme standard.

Exercice 2

On choisit de modifier le modèle (P) de l'exercice 1.

Premièrement, l'objectif devient $\max z' = x_1 + 2x_2 + 2x_3$.

Deuxièmement, le domaine des solutions admissibles de (P) est modifié en ajoutant la contrainte $x_2 + x_3 \leq 4$.

On obtient le problème (P') suivant.

$$(P') \begin{cases} \max z' = & x_1 & +2x_2 & +2x_3 \\ \text{s.c} & -x_1 & + x_2 & -\frac{1}{2} x_3 & \leq & -2 \\ & x_1 & + x_2 & + x_3 & = & 5 \\ & & x_2 & + x_3 & \leq & 4 \\ & x_1 & , x_2 & , x_3 & \geq & 0 \end{cases}$$

On souhaite utiliser la solution optimale trouvée à la fin de l'exercice 1, notée x^0 (solution optimale de (P)) pour démarrer la résolution de (P') avec l'algorithme du simplexe.

Question 1

Pourquoi est-il pertinent d'utiliser la solution x^0 pour démarrer la méthode du simplexe?

Question 2

Détailler l'ensemble des variables à gauche du système d'équations et l'ensemble des variables à droite pour la solution x^0 relativement à (P') . Ensuite, exprimer les variables à gauche de x^0 et z' en fonction des variables à droite de x^0 .

Question 3

Trouver la solution et la valeur optimales de (P') en démarrant la méthode du simplexe à partir de x^0 . Que constatez-vous ?

Exercice 3

On remplace la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ de (P') par $x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$. On obtient le problème (P'') suivant :

$$(P'') \left\{ \begin{array}{llllll} \max z' = & x_1 & +2x_2 & +2x_3 & & \\ s.c & -x_1 & + x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & \leq & -2 \\ & x_1 & + x_2 & + x_3 & \leq & 5 \\ & & x_2 & + x_3 & \leq & 4 \\ & x_1 & , x_2 & , x_3 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Question 1

Ecrire le dual (D) de (P'') .

Question 2

Vérifier que la solution optimale de (P') est aussi optimale pour (P'') en utilisant les relations d'exclusion après les avoir listées. En déduire la solution duale optimale et la valeur optimale de (D) .