Examen Programmation Linéaire Avancée
Février 2014

Durée 2 Heures 30

Tous documents papier autorisés
Ordinateur, tablette, calculette et téléphone non autorisés

Recommandations : Vous pouvez utiliser le résultat de questions précédentes pour répondre à une question - Vous prendrez soin de bien détailler chacune de vos réponses

Soit P_1 le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{rcl} \max z & = & 2 + x_1 - 2x_4 \\ x_2 & = & 1 - x_4 \\ x_3 & = & 0 - x_1 - x_4 \\ x_i & \geq & 0 \quad\quad 1 \leq i \leq 4 \end{array}$$

Question 1 *Expliquer pourquoi l'écriture de ce programme linéaire sous la forme proposée ci-dessus permet d'effectuer une itération de l'algorithme du simplexe.*

Question 2 *Donner la solution associée à la forme de P_1 donnée ci-dessus. Vous donnerez la valeur de chacune des variables ainsi que celle de la fonction objectif.*

Question 3 *Appliquer l'algorithme du simplexe. Vous donnerez la valeur de chacune des variables ainsi que celle de la fonction objectif pour la solution optimale que vous aurez obtenue à l'issue des itérations.*

Question 4 *Comparez les solutions obtenues aux questions 2 et 3.*

Question 5 *Déduire de la question précédente que le critère d'arrêt de l'algorithme du simplexe est suffisant mais non nécessaire.*

Nous considérons maintenant P_2 le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{rcl} \min w &=& y_1 + y_2 \\ y_1 &\geq& 1 \\ y_1 + y_2 &\geq& 2 \\ y_i &\geq& 0 \qquad 1 \leq i \leq 2 \end{array}$$

Question 6 *Donner D_2 le programme linéaire dual de P_2.*

Question 7 *Ecrire les relations d'exclusion liant P_2 et D_2.*

Question 8 *Soit la solution $y_1^* = 1, y_2^* = 1$ de P_2. Justifier en détail pourquoi cette solution est optimale. Donner la solution optimale de D_2 associée.*

Question 9 *Nous considérons maintenant la solution $y_1 = 2, y_2 = 0$ de P_2. Est-ce une solution réalisable de P_2 ? Jusifiez votre réponse.*

Question 10 *En utilisant les questions 8 et 9 fournir l'ensemble des solutions optimales de P_2 ainsi que celles de D_2.*

Nous considérons $P_2(\epsilon)$ le programme linéaire suivant dans lequel $\epsilon > 0$ est un réel strictement positif suffisamment petit :

$$\begin{array}{rcl} \min w &=& y_1 + y_2 \\ y_1 &\geq& 1 \\ y_1 + y_2 &\geq& 2 + \epsilon \\ y_i &\geq& 0 \qquad 1 \leq i \leq 2 \end{array}$$

Question 11 *Donner une solution optimale de $P_2(\epsilon)$ ainsi que de $D_2(\epsilon)$ son dual.*

Nous supposons maintenant que les variables de $P_2(\epsilon)$ et $D_2(\epsilon)$ sont des entiers positifs. Nous notons $w(\epsilon)$ et $z(\epsilon)$ les valeurs des solutions optimales de $P_2(\epsilon)$ et $D_2(\epsilon)$.

Question 12 *Montrer que $w(\epsilon) \neq z(\epsilon)$.*